

**Региональный этап всероссийской олимпиады
школьников по математике в 2015/2016 учебном году**

Мурманская область

Шифр участника: М1111

Класс: 11

Количество баллов: 22

Результат участия: призер

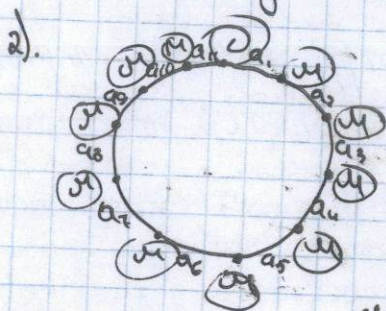
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от " _____ " _____ 20__ г.
на исх. № _____ от " _____ " _____ 20__ г.

II. 7.

M IIII

1). Пусть между мальчиком и девочкой, образующими хорошую пару, по одной из дуг находится k девочек и n мальчиков. Тогда не трудно дуге находится $n - (k+1) = n - k - 1$ мальчиков и $n - (k+1) = n - k - 1$ девочек $\Rightarrow$ обе дуги между мальчиком и девочкой удовлетворяют усл. хорошей пары, если хотя бы одна из них ему удовлетворяет.



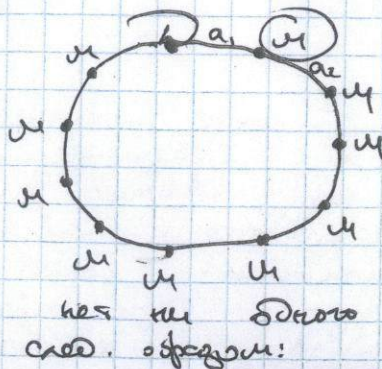
В последовательности обозначим дуги $a_1, a_2, \dots, a_n$ как показано на рис. (все обозначенные мальчики составляют хорошую пару с обозначенной девочкой). Пусть в этих промежутках будет по $k_1, k_2, \dots, k_n$ детей соответственно.

Т.к. k_1 - кол-во детей в промежутке между девочкой и мальчиком, составляющим хорошую пару, k_1 - четное (если мальчиков там l , то $k_1 = 2l$, т.к. девочек там l). Аналогично $(k_1 + k_2 + 1)$ - четное число $\Rightarrow k_2$ - нечетное.

Все числа $k_3, k_4, k_5, \dots, k_n$ - нечетные (Доказывается аналогично, например $(k_1 + k_2 + k_3 + 2)$ - четное, k_1 - четн, k_2 - нечетн $\Rightarrow k_3$ - нечетн.)

Число k_n - четное (аналогично ~~доказательству~~ k_1).

3). а) Взяв берем одного из мальчиков, составляющих хорошую пару с обозначенной девочкой.



б). Рассмотрим дугу a_i :

$D \quad a_i \quad M$

Т.е. для девочки короткая пара в этой промежуток быть не может, а k_i - нечётное, во этой дуге либо девочка, либо они передуги

~~$D \quad M \quad M \dots M \quad M$~~

Предположим, что внутри этой промежуток есть девочки, составляющая короткую пару с выбранным мальчиком. Пусть между ними будет l девочек и мальчиков. (l - число чётное)

$D \quad D \quad M$

Тогда между первоначально обозначенной девочкой и этой будет $(k_i - l - 1)$ детей. Т.е. k_i, l - чётные числа, $(k_i - l - 1)$ - число нечётное.

На всей промежуток a_i , кол-во девочек и мальчиков одинаково, между выбранным мальчиком и предполагаемой девочкой, учитывая, среди $(k_i - l - 1)$ детей на одного мальчика больше $\Rightarrow$ найдётся такой мальчик между первой обозн. девочкой и предполагаемой, для к-рою количество девочек между ним и первоначально ~~тоже~~ обозн. девочкой равно количеству мальчиков (~~так~~ эт этого мальчика кол-во девочки между ним и предполагаемой девочки также равно колу мальчиков) $\Rightarrow$ он составляет с первой ~~выбранной~~ обозн. девочкой короткую пару

не доказано

Но ~~на~~ ~~и~~ ~~у~~ ~~дев~~ ~~первонач.~~ ~~обозн.~~ ~~девочки~~ ~~не~~ ~~может~~ ~~быть~~ ~~мальчиков~~, с к-рыми она сост.

№ _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.
на исх. № _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.

н/р добывание

в) заменим a_2 на про-
мелютку a_2 на одну девоч-
ку больше, ~~не~~ $\neq$ Распределения-
ми, аналогичными пункту

↓ на промежутке между выравненными точками
и нет.

Предположу, что на промежутке между девочкой на 2-е a_2 , к-рая одностатно является коротней парой для выбранной мальчика, и следующей мальчиком, являющимся коротней парой для первого. означ. девочкой есть еще одна девочка, являющаяся коротней парой для выбранной мальчика. Пусть между ними нет $\Rightarrow$ нет $\Rightarrow$ и вобр. мальчиком m детей. m - число детей, тогда между этой девочкой

и следующим мальчиком, являющимся короче
парой для первого. обозн. девочки кол-во
ребей четное. (т.к. все ~~на~~ на a_2 кол-во
нечетное).

Но на всем промежутке a_2 должно быть на
одну девочку больше $\Rightarrow$ на этом проме.
на одного мальчика больше, что невозможно.
но при четном кол-ве детей на нем.

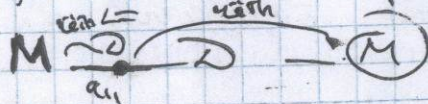
(Если девочек, например, 8, а всего детей
на проме. $8+8+1=28+1$ — нечетное число).



На дуге a_2 есть ~~одна~~ ровно
одна девочка, являющаяся
коротей парой для выбранного
мальчика.

2). Аналогично показывается, что на про-
межутках $a_3, a_4, a_5 \dots a_{10}$ есть по ра-
но одной девочке, являющейся коротей
парой выбранному мальчику.

3). Рассмотрим промежуток a_{11} . Предположу
что на нем есть
девочка, являющаяся
коротей парой для
мальчика. Между ней и выбр.
мальчиком четное кол-во детей.



Всего между выбр. мальчиком и мальчиком,
означ. слева на выбранном первом, нечетно
кол-во детей $\Rightarrow$ между предполагаемой
девочкой и мальчиком, означ. слева четное
кол-во детей. Всего между означ. маль-
ком на одну девочку больше, чем маль-
чик $\Rightarrow$ между предполагаемой девочкой
и мальком, означ. слева должно быть на
одного мальчика больше, что невозможно.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от "____" _____ 20__ г.
на исх. № _____ от "____" _____ 20__ г.

при естественном кол-ве детей

М 1111

Противоречие

на промежутке q_n нет
девочки, являющейся соседней
парой для выбранного маль-
чика.

Вывод: на промежутках
 $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{10}$ существует
по ровно одной девочке, яв-
ляющейся соседней парой для
выбранного мальчика, на промежутках
 q_1 и q_{11} таких девочек нет.
Вместе с первыми обознач. девоч-
кой получается ровно 10 девочек пар для
выбранного мальчика. ч.р.д.

II.6. Пусть K - кол-во красных сфер,
($2016 - K$) - кол-во зеленых сфер.

T - кол-во синих точек
Максимальное кол-во синих точек будет если каждая красная сфера коснется каждой зеленой.

$$T = K \cdot (2016 - K)$$

$T = 2016K - K^2$ - квадратичная ф-ия, гра-
фик - парабола, ветви вниз,
максимум в вершине ($K_0; T_0$)

$$K_0 = -\frac{2016}{2 \cdot (-1)} = 1008$$

$$T_0 = 2016 \cdot 1008 - 1008^2 = 1008(2016 - 1008) = 1008^2 = 1016064$$

Ответ: 1016064

(1.5)

~~Замени, что, согласно г. Ветеру,
a и b являются квадратичными~~
 ~~$x^2 - (a+b)x + ab = 0$~~

1). $A = \mathbb{R}$ является полным множеством,
т.к. при любых $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ $(a+b) \in \mathbb{R}$
и $ab \in \mathbb{R}$. $A \subseteq \mathbb{R}$ т.к. A — множество
действительных чисел.

2). $A = \mathbb{Z}$ не является полным множеством,
 $A = \mathbb{N}$ не является полным множеством (пример:
 $a = 3, 4; b = 3, 6$)

НЕ ЯВЛЯЕТСЯ!

3). $A = \mathbb{Q}$ является полным множеством,
т.к. если $a \in \mathbb{Q}$ и $b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a+b \in \mathbb{Q}$ и
 $ab \in \mathbb{Q}$. Если $a \notin \mathbb{Q}$ или $b \notin \mathbb{Q}$, то
 $a+b \notin \mathbb{Q}$, т.к. только сумма двух
рациональных чисел является рациональным
числом.

4). ~~Допустим~~

~~0 $\in A$, т.к. если $a=0, b \neq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a+b \neq 0, ab=0$~~

~~0 $\in A$, т.к. если $a=0, b \neq 0, b \in A \Rightarrow$
 $\Rightarrow a+b = b \Rightarrow (a+b) \in A$
 $| ab=0 \Rightarrow 0 \in A.$~~

~~A т.к. A — непустое множество, всегда
можно найти такое число $b \in A$.~~

5). $A = \{0\}$ не является полным
множеством (пример: $a=5; b=-5$).

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.

на исх. № _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.

Покажем, что $A \neq Q$.

МННН

Пусть существует $k \in Q$
 $k \notin A$, при-
чем $A \cup \{k\} = Q$.

$$k = 1 \cdot k; \Rightarrow 1 \cdot k \notin A$$

$$(1+k) \in Q; (1+k) \neq k \Rightarrow (1+k) \in A$$

Противоречие.

Отвеч: $Q \leq A \leq \mathbb{R}$.

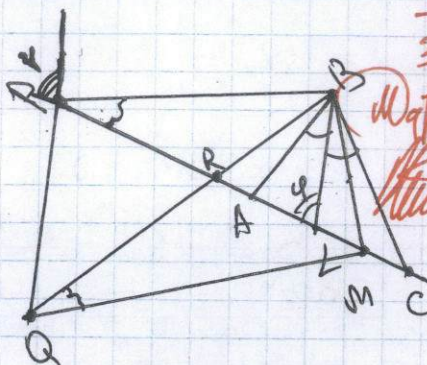
НЕ ДОКАЗАНО,
ЧТО "ПОЛНОЕ", КРОМЕ
 $\mathbb{R}$, НЕТ!

№ _____ от "____" _____ 20__ г.

на исх. № _____ от "____" _____ 20__ г.

11.3

M1111

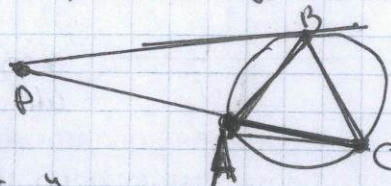


1	2	3	4
3	0	7	0
3	0	7	0

1). Пусть $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \alpha$,
 $\angle ALB = \varphi$.

$$\angle ABL = \angle \varphi = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - (180^\circ - \beta - \alpha) = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - 180^\circ + \beta + \alpha = \frac{\beta}{2} + \alpha.$$

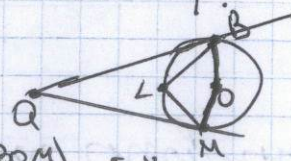
2). $\angle PBA =$
 $= \angle BCA$, т.к.
PB - кас. к ω ,
2 ACB - вписанный в ω и
 $\angle PBA$ закрывается дугой, на к-ую он
проектел $\angle ACB$.
 $\angle PBA = \alpha$.



3). $\angle PBL = \angle PBA + \angle ABL = \alpha + \frac{\beta}{2} = \angle ALB = \varphi$.

4). Из $\triangle PBL$ $\angle LPB = 180^\circ - 2\varphi$.

5). Пусть O - центр окр. Γ .
 $\angle AOM = 180^\circ - \beta$
 $\angle POM = 2(\alpha + \frac{\beta}{2})$
 $\angle AOM = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle POM)$, т.к. M



$\angle BOM$ - центральный, $\angle BLM$ - вписанный, они опираются на меньшую и большую дуги.

$$\angle BLM = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle BOM = 180^\circ - \varphi$$

$\Downarrow$

$$\angle BOM = 2\varphi$$

$$\angle BQM = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle BOM$$

из $\triangle BOM$, где $\angle QBO = \angle QMO = 90^\circ$
по сл-ку вписанная, проведенная в т. касания.

$$\angle BQM = 180 - 2\varphi = \angle LPB$$

6). $\triangle QRM \sim \triangle PRB$ т.к. равны вертикальные углы и $\angle BQM = \angle LPB$.

$\Downarrow$

$$\frac{QR}{RP} = \frac{MR}{RB} = \frac{QM}{PB}$$

$$\frac{QR}{RP} = \frac{MR}{RB}$$

$$\frac{QR}{MR} = \frac{RP}{RB}$$

$$\frac{QR}{MR} = \frac{RP}{RB}$$

$$\angle PRQ = \angle BRM \text{ как верш.}$$

$\Downarrow$

$$\triangle MRB \sim \triangle QRP \Rightarrow \angle RBM = \angle QPR$$

$\Downarrow$

$$\triangle QBM \sim \triangle PMB$$

$\Downarrow$

$$\angle QBM = \angle QMB$$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от "____" _____ 20 ____ г.
на исх. № _____ от "____" _____ 20 ____ г.

⇒). U₃ Δ QBM ∠QBM + ∠QMB = M1111
= 180 - ∠BQM = 2φ.

∠QBM = ∠QMB = φ.

∠APQ = φ

φ = φ

PQ || BL т.к. равны
накрест лежащие углы,
ч.р.д.

11.1

$S(x) = ax^2 + bx + c$

$S(c) = ac^2 + bc + c = ac^2 + (b+1)c$

1). Если c - иррац., тогда
 $ac^2 + (b+1)c$ - иррац.

Сумма рациональна, если каждое слагаемое рационально.

ac^2 - иррац.

$(b+1)c$ - иррац., но b - иррац. ⇒

⇒ $(b+1)$ - иррац., а

c - иррац.; произв. иррац. и иррац. - иррац. число

⇒ противоречие.

2). Если c - рац., то

$$ac^2 + (b+1)c - \text{цфрац.}$$

$$(b+1) \cdot c - \text{рац.}, \text{ т.к. } (b+1) - \text{рац.}$$

и $c - \text{рац.}$

ac^2 - цфрац., т.к. сумма цфрац.
только если хотя бы одно из слага-
емых цфрац.

$$c^2 - \text{рац. число}$$

$$a - \text{цфрац.}$$

$$D = b^2 - 4ac, \text{ не}$$

$$b^2 - \text{рац.}$$

$$c - \text{рац.}, \Rightarrow ac - \text{цфрац.}$$

$$a - \text{цфрац.}$$

$$\Downarrow$$

$$-4ac - \text{цфрац.}$$

Сумма рац. и цфрац. чисел
иррациональна.

Ответ: нет.

11.4. Заметим что при любом рас-
положении датчиков квадрат 985×985 ,
находящийся в центре доски, находится
внутри корабля $\Rightarrow$ датчик на этом квад-
рате датчиков не имеет сигнала.



~~Разделю доску на 403~~
~~полю по 5 клеток.~~

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от " _____ " _____ 20__ г.
на исх. № _____ от " _____ " _____ 20__ г.

M1111

На каждую из оставшихся
срок и столбцов необходимо
как минимум по одному
детектору, т.к. иначе при
перевитии вертела влево,
вправо и влево в каких-
то двух положениях сигналы
будут одинаковыми. Приём
это ~~так~~ в каждой строке
и столбце должен быть хотя
бы один детектор, покра-
шенный красным.
Если расположить детекторы
так первого столбца в первой
строке, то, находясь в этом
столбце, красная точка покроет клетку с хотя
бы одним из них. Таким образом, на
каждую строку и столбец необходимо по 2
детектора. Но т.к. ~~каждый~~ детектор фикси-
рует одновременно строку и столбец, их
нужно иметь в 2 раза меньше. При рас-
положении в шахматном порядке.
Всего столбцов, к-рые необход. фиксировать: ~~2015~~ 2015
~~каждой строки: 2015~~ 2015
~~Срок и столбец необходимо фиксировать только строки или столбцы~~
Понадобится детекторов: ~~2060~~ 4030

Ответ: ~~2060~~
N = 4030.

11.2

$$x_1^2 \geq x_1 + x_2 + x_3$$

$$\sqrt{x_1^2} \leq \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$$

т.к. все части положительные, возведем
в квадрат.

$$x, y, z \in \mathbb{R} \quad x+y+z+2\sqrt{xz}+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}$$